UNIVERSITE ABDELMALEK ESSAADI
Faculté des Sciences de Tétouan
Département de Mathématiques et Informatique

17-11-2007

Contrôle N°1 Analyse I
SMA-SMI

Problème 1. On considère la suite u définie par $u_0 = 4$ et $u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + \frac{4}{u_n})$.

(2) (1) a. Montrer que $u_n^2 - 4 = \frac{(u_{n-1}^2 - 4)^2}{4u_{n-1}^2}$ pour tout $n \geq 1$. Montrer alors que $u_n \geq 2$ pour tout $n \geq 0$.

(2) b. Démontrer que u est décroissante.

(2) c. Montrer que u est convergente et calculer sa limite.

Problème 2. On considère les suites u et v définies par $u_0 = 4$, $v_0 = 9$, $u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}$ et $v_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + v_n)$.

(1) a. Pour $a > 0$ et $b > 0$, montrer que $\frac{1}{2}(a+b) - \sqrt{ab} = \frac{1}{2}(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2$.

(2) b. En déduire que $v_n - u_n \geq 0$.

(1.5) (1.5) c. Montrer que v est décroissante et que u est croissante.

(1) (1) d. Montrer que $v_n - u_n \leq v_n - u_{n-1}$ et que $v_n - u_{n-1} = \frac{1}{2}(v_{n-1} - u_{n-1})$, pour tout $n \geq 1$.

(1) e. En déduire que $v_n - u_n \leq \frac{1}{2}(v_{n-1} - u_{n-1})$ pour tout $n \geq 1$.

(2) (2) f. Montrer que $v_n - u_n \leq 5(\frac{1}{2})^n$ pour tout $n \geq 0$. En déduire que les suites u et v sont convergentes et ont la même limite.

Corrigé

Problème 1. a. On a :

2 $$u_n^2 - 4 = \frac{1}{4}\left(u_{n-1}^2 + 8 + \frac{16}{u_{n-1}^2} - 16\right) = \frac{1}{4}\left(u_{n-1}^2 - 8 + \frac{16}{u_{n-1}^2}\right) = \frac{u_{n-1}^4 - 8u_{n-1}^2 + 16}{4u_{n-1}^2} = \frac{(u_{n-1}^2 - 4)^2}{4u_{n-1}^2}$$

1 Donc, $u_n^2 - 4 \geq 0$ pour $n \geq 1$. Par suite $u_n \geq 2$ pour $n \geq 0$ car $u_0 \geq 2$.

b. On a :

2 $$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2}u_n + \frac{1}{2}\frac{4}{u_n} - u_n = \frac{1}{2}\frac{4}{u_n} - \frac{1}{2}u_n = \frac{4 - u_n^2}{2u_n} \leq 0 \quad \text{car } 4 - u_n^2 \leq 0$$

Donc, $u_{n+1} \leq u_n$ pour tout $n \geq 0$.

1 c. La suite u est décroissante et minorée. Donc, elle est convergente soit
La fonction $f(x) = \frac{1}{2}(x + \frac{4}{x})$ est continue en l. Donc, on a :

$$l = \frac{1}{2}\left(l + \frac{4}{l}\right)$$

1 $2\ell = \ell + \frac{4}{\ell}$

$\ell^2 = 4$

$\ell = -2$ ou $\ell = 2$

Donc, $\underline{\ell = 2}$ car $u_n \geq 2$.

Problème 2. a. On a:

1 $\frac{1}{2}(a+b) - \sqrt{ab} = \frac{1}{2}(a + b - 2\sqrt{a}\sqrt{b}) = \frac{1}{2}(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2$

b. On a:

2 $v_n - u_n = \frac{1}{2}(u_{n-1} + v_{n-1}) - \sqrt{u_{n-1}v_{n-1}} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{v_{n-1}} - \sqrt{u_{n-1}}\right)^2$

Donc, $v_n - u_n \geq 0$.

c. On a:

1.5 $v_{n+1} - v_n = \frac{u_n + v_n}{2} - v_n = \frac{u_n - v_n}{2} \leq 0$.

Donc, v est décroissante. Pour u, on a:

1.5 $u_{n+1} - u_n = \sqrt{u_n v_n} - u_n = \underbrace{\sqrt{u_n}}_{\geq 0}\underbrace{(\sqrt{v_n} - \sqrt{u_n})}_{\geq 0} \geq 0$.

Donc, u est croissante

---

1 d. On a: $u_{n-1} \leq u_n \Rightarrow -u_n \leq -u_{n-1} \Rightarrow \underline{v_n - u_n \leq v_n - u_{n-1}}$

1 D'autre part: $v_n - u_{n-1} = \frac{u_{n-1} + v_{n-1}}{2} - u_{n-1} = \underline{\frac{1}{2}(v_{n-1} - u_{n-1})}$.

e. On a:

1 D'après d), on a $v_n - u_n \leq \frac{1}{2}(v_{n-1} - u_{n-1})$.

f. On a:

2 $v_n - u_n \leq \frac{1}{2}(v_{n-1} - u_{n-1}) \leq \left(\frac{1}{2}\right)^2(v_{n-2} - u_{n-2}) \leq \cdots$

$\leq \left(\frac{1}{2}\right)^n (v_0 - u_0)$

$\leq 5\left(\frac{1}{2}\right)^n$.

On a alors:

2 $\lim(v - u) = 0$

v est décroissante et u est croissante. Donc u et v sont adjacentes. Elles sont alors convergentes et ont la même limite.




ETUSUP.com